Nachklausur: „Einführung in die Mathematik“, Köln WS 2011/2012

- Bearbeitungszeit: 3 Stunden.
- Die Punktsumme ergibt 52 Punkte. Beim Erreichen von mindestens 26 Punkten gilt die Klausur als bestanden.

Aufgabe 1 (6 + 4 = 10 Punkte)

(i) Beweisen Sie, dass für jede ganze Zahl $n \geq 0$ gilt: $81 \mid 10^n - 9n - 1$.

(ii) Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $k - 1 \mid k^2 + 1$.

Aufgabe 2 (4 + 4 = 8 Punkte)

(i) A, B, C seien Mengen. Beweisen oder widerlegen Sie:

a)
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$

b)
$$\text{Aus } A \cup B = A \cup C \text{ und } A \cap B = A \cap C \text{ folgt } B = C.$$

(ii) Es sei $p \geq 5$ eine beliebige Primzahl. Beweisen Sie, dass dann gilt:
$$p^2 \equiv 1 \mod 12.$$

Hinweis: Satz über die Division mit Rest durch 12.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Ein Einzelhändler kauft für genau 99 € Fischdosen von zwei Sorten, und zwar x Dosen zu 1,80 € und y Dosen zu 1,50 €. Er kauft höchstens 15 Dosen mehr von einer Sorte als von der anderen. Welche Lösungen sind möglich? (Geben Sie alle Lösungen explizit an.)

Aufgabe 4 (5 + 4 = 9 Punkte)

Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{für} \quad x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}$$
und
$$g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{für} \quad x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases} .$$

(i) Bestimmen Sie $f \circ g$.

(ii) Untersuchen Sie $f \circ g$ auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 5 ((0,5+0,5+0,5+0,5)+3+(4+1+1+2)=13 Punkte)

(i) Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) $|a| :=$ (für $a \in \mathbb{R}$)
b) Umkehrbare Funktion $f\colon X \to Y$
c) x ist ein Teiler von y (d. h. $x \mid y$) ($x, y \in \mathbb{Z}$)
d) Winkelfeld eines Winkels $\sphericalangle AOB$

(ii) Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen für beliebige $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ und Funktionen f, g? Kreuzen Sie an:

Aussage	Wahr	Falsch
$\binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$		
$a \mid b + c \Rightarrow a \mid b$ und $a \mid c$		
$c \mid a \cdot b \Rightarrow c \mid a$ oder $c \mid b$		
$11^2 \cdot 17^6 \cdot 31^3$ hat 84 positive Teiler.		
Der Inkreismittelpunkt eines beliebigen Dreiecks ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten.		
$f \circ g$ bijektiv $\Rightarrow$ f bijektiv und g bijektiv.		

(iii) a) Beweisen Sie den Satz über „Euklids Primzahlmaschine“.
b) Was besagt der Binomialsatz?
c) Was besagt der Satz über die Kongruenzen zu verschiedenen Moduln?
d) Was besagt der Strahlensatz (in allgemeiner Form)?

Rechenaufgabe (1 + 1 + 1 = 3 Punkte)

(i) Berechnen Sie (für $n \in \mathbb{N}$):

$$-4^8 + 4^{12} - 4^{16} + \ldots - 4^{8n} =$$

(ii) Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen? Kreuzen Sie an:

Aussage	Wahr	Falsch
$\left(2^{(2^3)}\right)^3 = 4^{(3^3)}$		
$x \leq y \Rightarrow x^2 \leq y^2$ ($\forall\ x, y \in \mathbb{R}$)		
$x^2 = y \iff x = \pm\sqrt{y}$ ($\forall x, y \in \mathbb{R},\ y > 0$)		

(iii) Zerlegen Sie in Faktoren: $ac - ab^2 + b^2c - c^2 =$