Klausur zur Einführung in die Mathematik, Köln WS 2011/2012

- Bearbeitungszeit: 3 Stunden.
- Die Rechenaufgabe kann auch zu negativen Punkten führen. Die Punktsumme ergibt 52 Punkte. Beim Erreichen von mindestens 27 Punkten gilt die Klausur als bestanden.

Aufgabe 1 $((2 + 2) + 4 = 8$ Punkte)

(i) Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion und seien X, Y Teilmengen von A und U, V Teilmengen von B. Beweisen Sie, dass dann gilt:

a) $X \subseteq Y \Rightarrow f[X] \subseteq f[Y]$

b) $U \subseteq V \Rightarrow f^{\leftarrow}[U] \subseteq f^{\leftarrow}[V]$

(ii) Es bezeichne $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen. Bestimmen Sie die Menge

$$\{p \in \mathbb{P} \mid p^2 + 2 \in \mathbb{P}\}.$$

Hinweis: Der Satz über die Division mit Rest kann helfen.

Aufgabe 2 $(5 + (2 + 2) = 9$ Punkte)

(i) Finden Sie die kleinste natürliche Zahl n welche größer ist als 100 und für die gilt:

Die Anzahl der Teiler von $8n$ ist doppelt so groß wie die Anzahl der Teiler von n.

(ii) a) Man bestimme die letzte Ziffer der Zahl 2012^{2012}.

b) Bestimmen Sie den Rest der Division der folgenden Zahl durch 11:

$$2012^{(2011^{2010})}.$$

Aufgabe 3 $(2 + 7 = 9$ Punkte)

Eine Blaskapelle erhält einen Betrag von 10 000 €, um Trompeten und Posaunen anzuschaffen. In der erwünschten Qualität kosten eine Trompete 1050 € und eine Posaune 1200 €.

(i) Warum kann der zur Verfügung stehende Betrag nicht restlos ausgegeben werden?

(ii) Welches ist der höchste Betrag, der ausgegeben werden kann, und wie viele Instrumente beider Arten werden jeweils für diesen Höchstbetrag angeschafft?

Aufgabe 4 (6 + 4 = 10 Punkte)

Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{für} \quad x < -3 \\ x^2 & \text{für} \quad x \geq -3 \end{cases}$$

und

$$g(x) := \begin{cases} x^2 - 4x + 1 & \text{für} \quad x < 2 \\ -x - 1 & \text{für} \quad x \geq 2 \end{cases}.$$

(i) Bestimmen Sie $f \circ g$.

(ii) Untersuchen Sie $f \circ g$ auf Surjektivität. Beweisen Sie, dass $f \circ g$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 5 ((0,5+0,5+0,5+0,5)+3+(4+2+2+1)=14 Punkte)

(i) Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) Potenzmenge einer Menge M:
b) Surjektive Funktion $f\colon C \to A$:
c) Unendliche Menge M:
d) Winkel:

(ii) Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen für beliebige $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$? Kreuzen Sie an:

Aussage	Wahr	Falsch
Jede bijektive Funktion ist umkehrbar.		
Jede Funktion besitzt einen Graphen.		
$a \cdot b \equiv a \cdot c \mod m \Rightarrow b \equiv c \mod m$		
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$		
Das Orthozentrum liegt stets im Inneren des Dreiecks.		
$\mathrm{kgV}(a, b, c) \cdot \mathrm{ggT}(a, b, c) = \lvert a \cdot b \cdot c\rvert$		

(iii) a) Beweisen Sie das Lemma von Euklid.
b) Was besagt der Existenzsatz?
c) Was besagt die Umkehrregel?
d) Was besagt der Außenwinkelsatz?

Rechenaufgabe $(0,5+0,5+0,5+0,5=2$ Punkte$)$

(i) Berechnen Sie:
$$3^2 - 3^4 + 3^6 - 3^8 + \ldots - 3^{4n} =$$

(ii) Welchen Wahrheitswert haben die folgenden Aussagen? Kreuzen Sie an:

Aussage	Wahr	Falsch
$\sqrt[3]{3^{(3^3)}} = 3^{(3^2)}$		
$\sqrt{x^2} = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$		
$2 \cdot 5^n = 10^n$		

(iii) Vereinfachen Sie (für $x \neq -3$): $\dfrac{3 - x^2 - 2x}{x+3} =$

(iv) Zerlegen Sie in Faktoren: $a^2 - ab - b - 1 =$